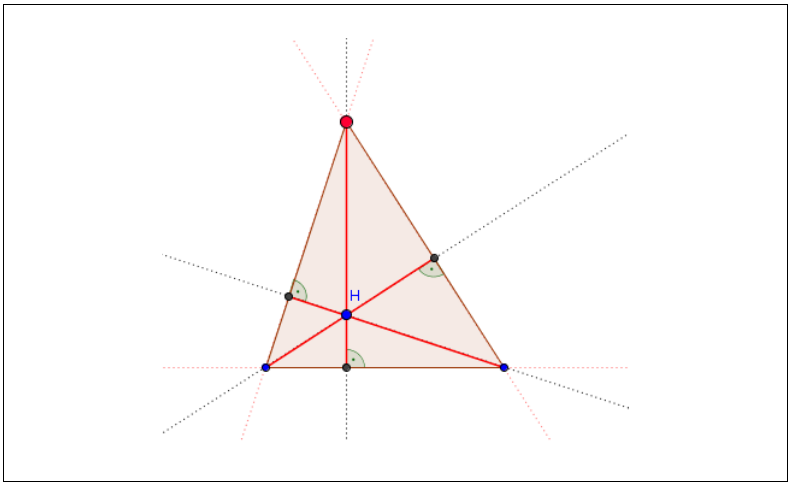
Der Höhenschnittpunkt im Dreieck

Aufgabenstellung



1. Beobachte die Lage des Höhenschnittpunktes H.
   Wo befindet sich H?
   a) bei einem spitzwinkligen Dreieck,
   b) bei einem rechtwinkligen Dreieck,
   c) bei einem stumpfwinkligen Dreieck?
2. Beim rechtwinkligen Dreieck tritt etwas Besonderes auf.
   Begründe, warum das so ist.

Antworten

1. a) Beim spitzwinkligen Dreieck liegt die Höhe innerhalb der Dreiecksfläche.

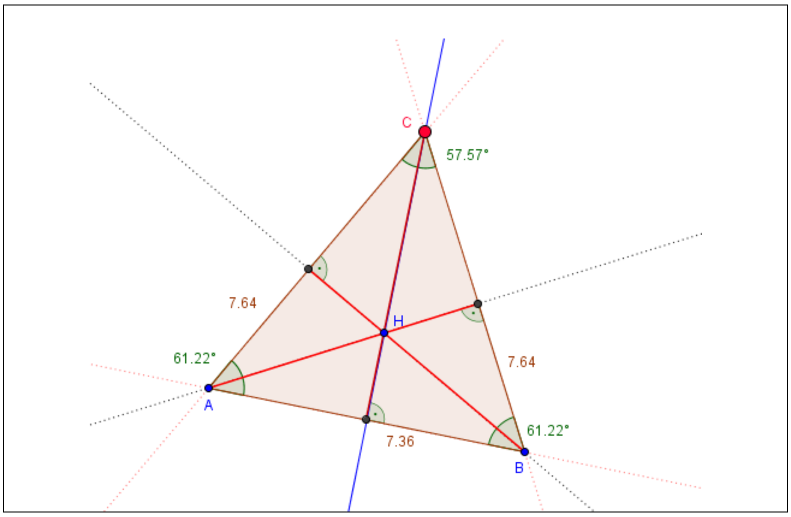
   b) Beim rechtwinkligen Dreieck fällt die Höhe mit einer Dreiecksseite zusammen.

   c) Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt die Höhe ausserhalb der Dreiecksfläche.

2. *Mögliche Formulierung:*
   Beim rechtwinkligen Dreieck sind die beiden kürzeren Dreiecksseiten gleichzeitig auch Höhen.

Höhen im gleichschenkligen Dreieck

Aufgabenstellung



1. a) Bewege die Ecke C.
   Notiere, welche Art von Dreieck hier vorliegt.
   b) Welche Beziehung besteht zwischen der Geraden m und der Dreiecksseite c?
   c) Wie wird Punkt H genannt?
2. Beobachte die Lage des Punktes H. Wo liegt dieser Punkt, bezogen auf das Dreieck, wenn
   a) das Dreieck spitzwinklig ist,
   b) das Dreieck rechtwinklig ist,
   c) das Dreieck stumpfwinklig ist?
3. Stelle den Winkel bei C möglichst genau auf 60°.
   a) Was für ein Dreieck entsteht als Spezialfall des gleichschenkligen Dreiecks?
   b) Was gilt für die drei Höhen in diesem speziellen Dreieck?

Antworten

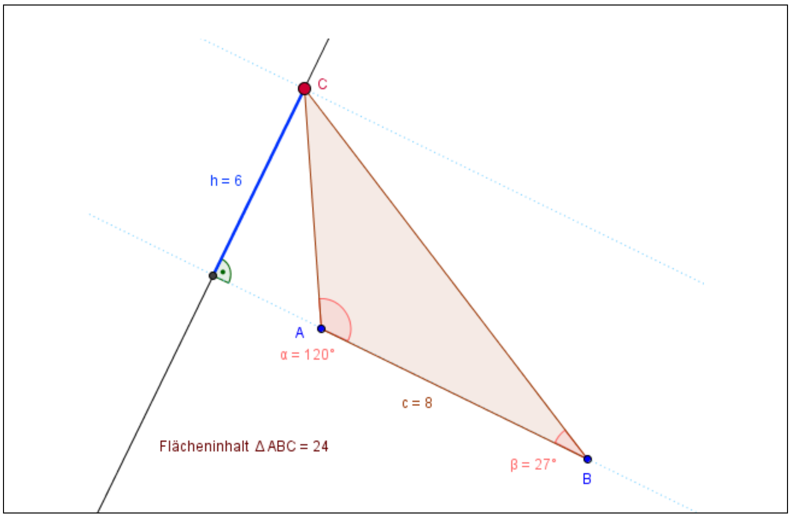
1. a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
   b) m ist die Mittelsenkrechte der Dreiecksseite c.
   c) H ist der Höhenschnittpunkt.

2. a) Beim spitzwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt innerhalb der Dreiecksfläche.
   b) Beim rechtwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt auf der Ecke C.
   c) Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt ausserhalb der Dreiecksfläche.

3. a) Es entsteht ein gleichseitiges Dreieck.
   b) Die drei Höhen im gleichseitigen Dreieck sind gleich lang.
   Hinweis:
   Von Hand lässt sich ein Winkel von genau 60° kaum einstellen. Ebenso ist es kaum möglich, beim rechtwinkligen Dreieck einen Winkel von genau 90° einzustellen.

Flächenberechnung im Dreieck

Aufgabenstellung



1. a) Verschiebe die Ecke C.
   Wo liegt die blaue Höhe h in Bezug auf das Dreieck
   – bei einem spitzwinkligen Dreieck,
   – bei einem rechtwinkligen Dreieck,
   – bei einem stumpfwinkligen Dreieck?

   b) Welchen Einfluss hat das Verschieben der Ecke C auf den Flächeninhalt des Dreiecks?
   Begründe deine Beobachtung.

2. Beim rechtwinkligen Dreieck besteht eine einfache Beziehung zwischen der Höhe und der Dreiecksseite.
   Beschreibe diese Beziehung.

Antworten

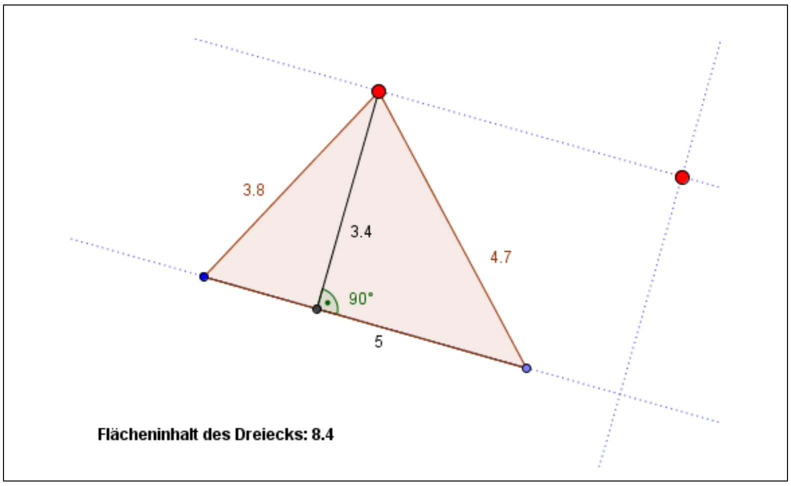
1. a) – Beim spitzwinkligen Dreieck liegt die Höhe innerhalb der Dreiecksfläche.
   – Beim rechtwinkligen Dreieck fällt die Höhe mit einer Dreiecksseite zusammen.
   – Beim stumpfwinkligen Dreieck liegt die Höhe ausserhalb der Dreiecksfläche.

   b) Das Verschieben der Ecke C ändert den Flächeninhalt des Dreiecks nicht.
   Mögliche Begründung:
   Die Ecke C wird parallel zur Dreiecksseite c verschoben. Höhe und Seite ändern ihre Grösse nicht.

2. *Mögliche Formulierung:*
   Beim rechtwinkligen Dreieck sind die beiden kürzeren Dreiecksseiten gleichzeitig auch Höhen.

Untersuchungen mit Dreiecksflächen

Aufgabenstellung



Dreiecke können ganz verschieden aussehen, auch wenn sie im Flächeninhalt und in einer Seite übereinstimmen.

1. Erstelle Dreiecke mit dem Flächeninhalt 10 [cm^2]
   a) ein rechtwinkliges Dreieck,
   b) ein gleichschenkliges Dreieck,
   c) ein spitzwinkliges Dreieck,
   d) ein stumpfwinkliges Dreieck.
2. Wiederhole Aufgabe 1 mit einem anderen Flächeninhalt.
3. Erstelle ein gleichseitiges Dreieck.
   Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
   Vergleiche deinen berechneten Wert mit der Flächenangabe auf dem Bildschirm. Was stellst du fest?

Antworten

1. a) –
   Hinweis:
   Es gibt zwei spiegelbildliche Lösungen.

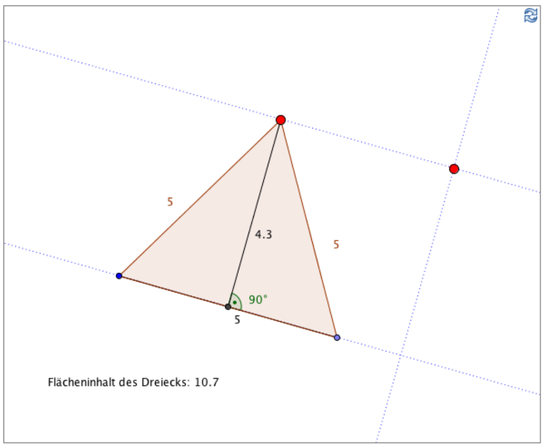
   b) –
   Hinweis:
   Es gibt drei Lösungen:
   – ein spitzwinklig gleichschenkliges Dreieck,
   – zwei spiegelbildliche stumpfwinklig gleichschenklige Dreiecke.

   c) –
   Hinweis:
   Für das spitzwinklige Dreieck gibt es viele Lösungen.

   d) *Hinweis:*
   Für das stumpfwinklige Dreieck gibt es viele Lösungen.

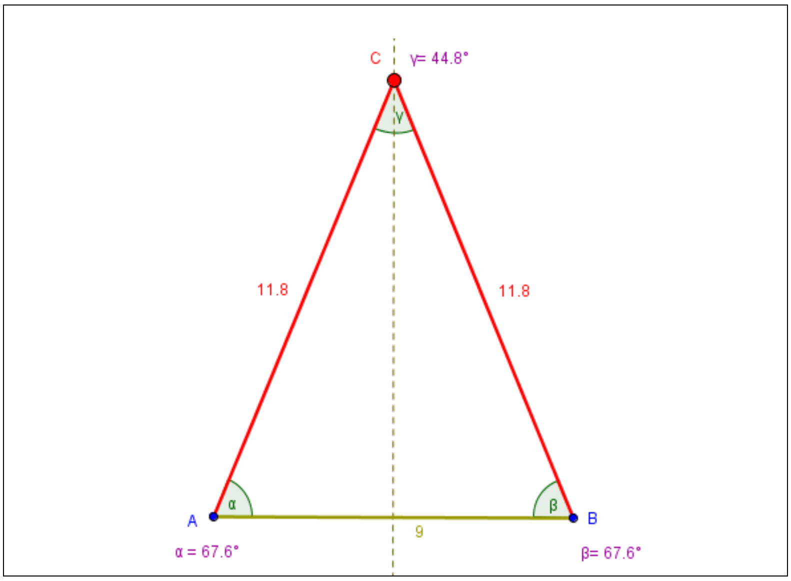
2. –

3. *Mögliche Feststellung:*
   Auf dem Bildschirm wird der Flächeninhalt mit 10.7 angegeben.
   Der berechnete Flächeninhalt beträgt 10.75.
   Hinweis:
   Der Grund für die Abweichung liegt darin, dass die Zahlen auf dem Bildschirm gerundet sind.
   Von Hand lässt sich kein exakt gleichseitiges Dreieck herstellen.



Gleichschenklige Dreiecke

Aufgabenstellung



1. Verändere die Form des Dreiecks.
   – Um welche Dreiecksart handelt es sich immer?
   – Woran erkennst du das?
2. Sind die beiden Winkel α und β grösser, kleiner oder gleich 45°
   a) beim stumpfwinkligen Dreieck,
   b) beim rechtwinkligen Dreieck,
   c) beim spitzwinkligen Dreieck?
3. Es gibt zwei spezielle Dreiecksarten, die nur bei ganz bestimmten Positionen von C auftreten.
   Notiere, wie diese Dreiecke heissen.

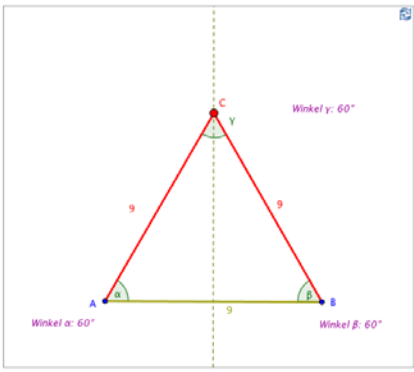
Antworten

1. – Es handelt sich immer um ein gleichschenkliges Dreieck.
   – Es hat immer zwei gleich lange Seiten und zwei gleich grosse Winkel.

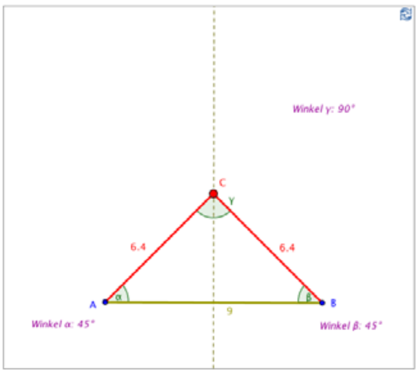
2. a) Beim stumpfwinkligen Dreieck sind α und β kleiner als 45°.
   b) Beim rechtwinkligen Dreieck sind α und β gleich 45°.
   c) Beim spitzwinkligen Dreieck sind α und β grösser als 45°.

3. Spezialfälle sind:

das gleichseitige Dreieck

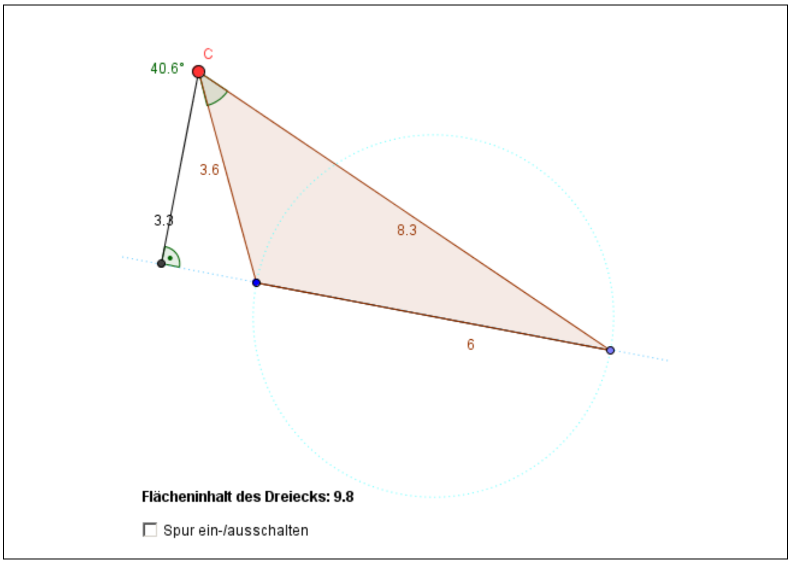


das rechwinklig gleichschenklige Dreieck



Rechtwinklige Dreiecke

Aufgabenstellung

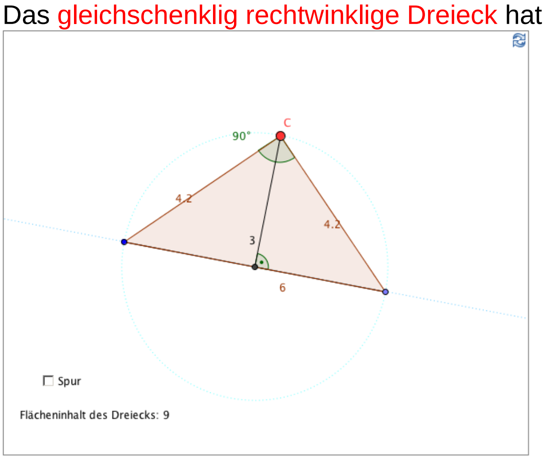


1. a) Bewege die Ecke C, bis das Dreieck bei C einen rechten Winkel hat.
   Bewege nun C so weiter, dass das Dreieck immer (möglichst) rechtwinklig bleibt.
   Beobachte von Zeit zu Zeit den Flächeninhalt des Dreiecks.
   b) Welche Form hat das rechtwinklige Dreieck, wenn der Flächeninhalt am grössten ist?
   c) Bestimme den grössten Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks.
2. Schalte die Spur ein.
   Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt C, wenn das Dreieck immer rechtwinklig bleiben soll?

Antworten

1. a) —

   b) Das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck hat den grössten Flächeninhalt.

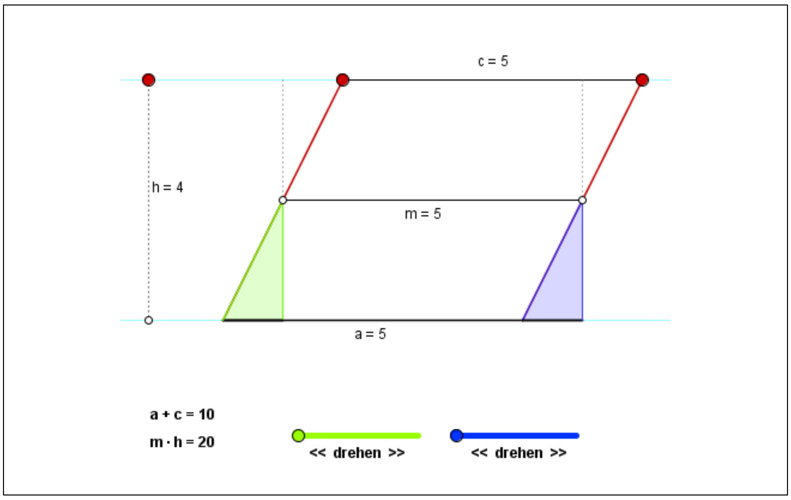


   c) Der grösste Flächeninhalt wird auf dem Bildschirm mit 9 angezeigt.
   Hinweis:
   Wird der Flächeninhalt mit Hilfe der beiden gleich langen Katheten berechnet, so weicht das Resultat leicht vom angezeigten Wert ab. Der Grund liegt darin, dass die Angaben auf dem Bildschirm gerundet sind und es kaum möglich ist, von Hand exakt ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck zu bilden.

2. *Mögliche Formulierung*:
   Die Ecke C bewegt sich vermutlich auf einem Kreis.
   Hinweis:
   Der Kreis ist auf dem Bildschirm mit einer feinen blauen Linie angedeutet.
   Dieser Kreis wird als **Thaleskreis** bezeichnet. Du lernst ihn in «Mathematik 2» im Kapitel «Aussagen am rechtwinkligen Dreieck» genauer kennen.

Flächenbestimmung alternativ

Aufgabenstellung



1. Bilde ein Trapez und bestimme seinen Flächeninhalt.
2. a) Bilde ein Dreieck und bestimme seinen Flächeninhalt.
   b) Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Berechnung der Trapezfläche und der Berechnung der Dreiecksfläche.
3. a) Bilde ein Dreieck und drehe die beiden farbigen Dreiecke um 180°.
   b) Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Berechnung der Rechtecks- und der Berechnung der Dreiecksfläche.
4. *Zum Tüfteln:*
   Der Term m • h für die Flächeninhaltsberechnung beim Trapez lässt sich als Universalformel für alle Dreiecks- und Parallenvierecksflächen benützen. Erkläre, warum das so ist.

Antworten

1. –

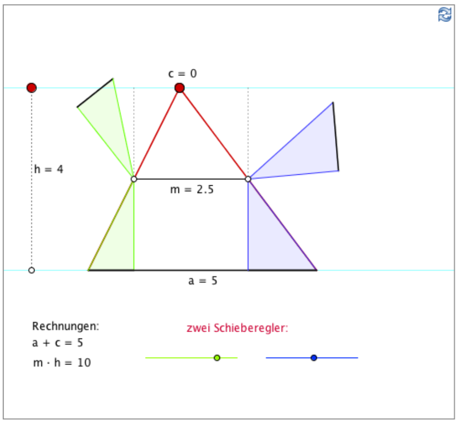
2. a) –

   b) *Mögliche Formulierung:*
   Die Flächen für das Trapez und das Dreieck können auf die gleiche Weise berechnet werden:
   Flächeninhalt = Mittellinie mal Höhe

3. a) –

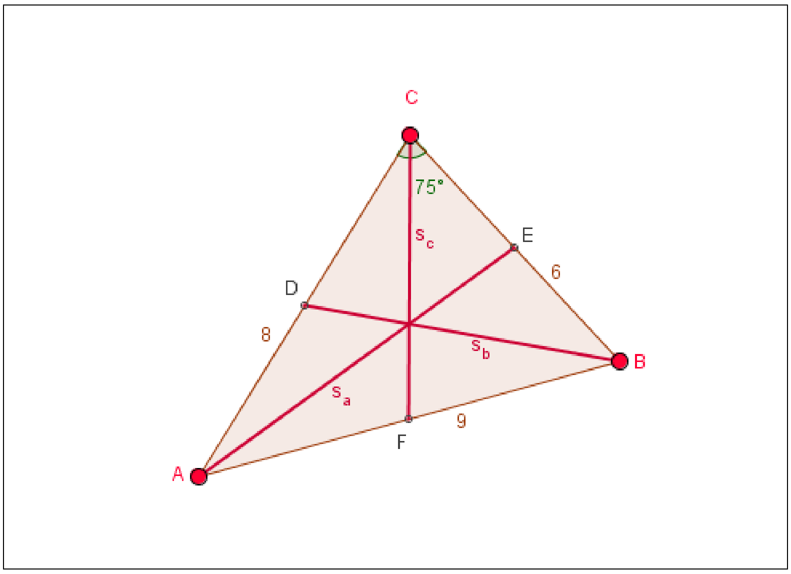
   b) *Mögliche Formulierung*:
   Das Rechteck und das Dreieck sind flächengleich.
   Die beiden Flächen können auf die gleiche Weise berechnet werden:
   A = m · h

4. *Zum Tüfteln:*
   Der Term m · h (Mittellinie mal Höhe)
   – gilt für alle Trapeze (an dieser Figur wurde der Term hergeleitet).
   – ist auch für Rechtecke richtig, denn m und h sind die Seitenlängen des Rechtecks.
   – kann auch für Dreiecke verwendet werden, denn m ist halb so lang wie diejenige Seite, die mit der zugehörigen Höhe h für die Berechnung des Flächeninhaltes benützt wird.
   Das Dreieck kann auch als spezielles Trapez betrachtet werden.



Schwerlinien im Dreieck

Aufgabenstellung



1. a) Beschreibe die Lage der Punkte D, E und F.
   b) Wie kannst du die drei roten Strecken, die Schwerlinien, am besten beschreiben?
2. a) Verändere das Dreieck und beobachte dabei die drei Schwerlinien s_a, s_b und s_c. Was fällt dir auf?
   b) Gilt deine Beobachtung auch bei speziellen Dreiecken, bei rechtwinkligen, gleichschenkligen, gleichseitigen usw.?
3. Der Schnittpunkt der Schwerlinien, der Schwerpunkt, teilt die Schwerlinien in zwei Abschnitte.
   Vergleiche die Längen dieser beiden Abschnitte.
   Was vermutest du?

Antworten

1. a) D, E und F sind Seitenmittelpunkte.

   b) *Mögliche Formulierung:*
   Jede Schwerlinie verbindet einen Seitenmittelpunkt mit der gegenüberliegenden Ecke.

2. a) Die drei Schwerlinien schneiden sich in einem Punkt.

   b) Ja. Die Schwerlinien schneiden sich bei allen Dreiecksarten immer in einem Punkt.

3. *Mögliche Formulierung:*
   Vermutlich ist bei jeder Schwerlinie der eine Abschnitt doppelt so lang wie der andere.