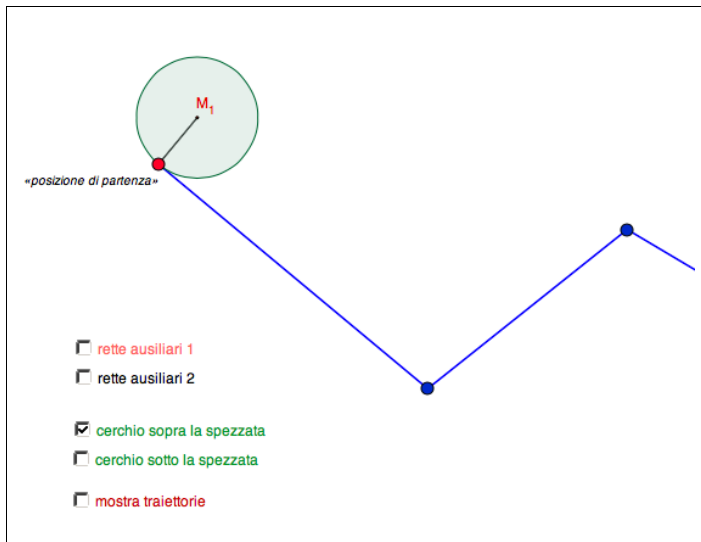




Rotolare cerchi

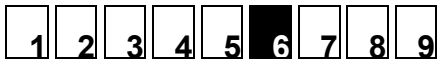
Problema



1. Che traiettoria descrive il centro M , del cerchio?
2. Queste ruote non rotolano in modo scorrevole lungo la «piegatura verso valle» oppure lungo la «piegatura verso montagna» della spezzata. In questa simulazione cosa si differenzia dalla realtà?
3. Le spezzate di colore blu quale relazione hanno con
 - a) le rette ausiliari 1?
 - b) le rette ausiliari 2?
4. Come puoi costruire le traiettorie dei centri dei cerchi lungo la spezzata? Distingui tra «piegatura verso valle» e «piegatura verso montagna» della spezzata.

Risposte

1. Il centro si muove **parallelamente** alla spezzata.
2. *Possibile risposta*
 - Nella «piegatura verso valle» la ruota rotola troppo lontano. Dal momento che la ruota incontra una salita il centro dovrebbe cambiare la propria direzione.
 - Se la ruota rotola su una «piegatura verso montagna» il centro descrive un arco. Questo arco non è visibile sullo schermo.
3. a) Le rette ausiliari 1 sono **perpendicolari** alle spezzate nelle «piegature verso montagna» e nelle «piegature verso valle».
b) Le rette ausiliari 2 sono **le bisettrici** di due spezzate adiacenti.
4. *Possibile risposta*
 - Costruzione della spezzata con «piegature verso valle»: a traiettoria del centro corre parallela alla spezzata fino alla bisettrice nella piegatura. In questo punto la traiettoria cambia direzione e corre parallela alla nuova spezzata. La traiettoria può essere costruita con l'ausilio di due rette parallele.
 - Costruzione della spezzata con «piegature verso montagna»: Il centro del cerchio si muove sull'arco della «piegatura verso montagna».

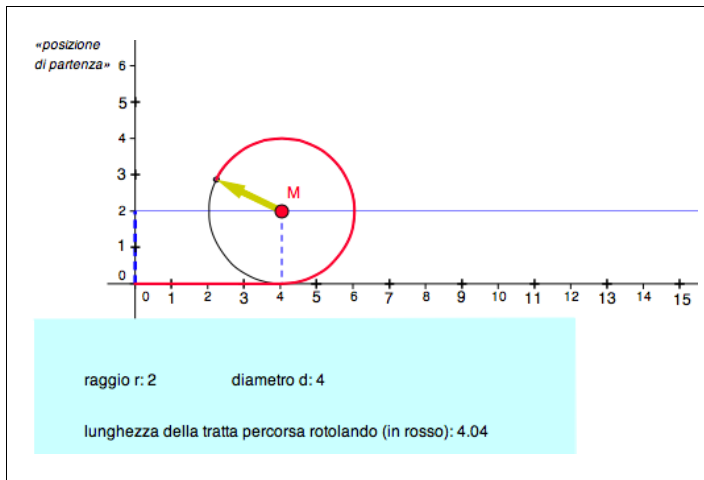


Su ogni lato della piegatura si costruisce la parallela fino alle rette ausiliari perpendicolari 1 e si collegano i due punti con un arco, il cui centro è la «piegatura verso montagna».



Lunghezza della circonferenza

Problema



1. Più il diametro d del cerchio è grande, più la lunghezza della circonferenza P_k è maggiore. Qual è la relazione tra d e P_k ?
Sposta il centro finché la circonferenza di colore rosso abbia compiuto un cerchio completo.
2. Ripeti il movimento rotatorio del cerchio utilizzando raggi diversi.
 - a) Crea una tabella e inserisci ogni volta i due valori d e P_k .
 - b) Per ciascuna coppia di valori inserita nella tabella dividi P_k per d . Cosa constati?
 - c) Scrivi qual è la relazione tra P_k e d .

Risposte

1. *Possibile descrizione*
La lunghezza della circonferenza e il diametro sono proporzionali.
2. a) *und b)*

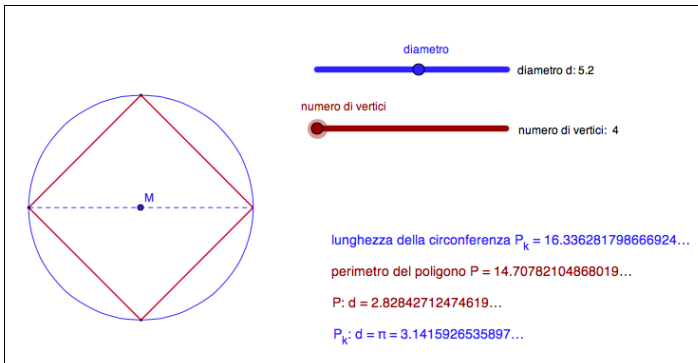
d									
P_k									
$P_k:d$									

- c) *Possibile descrizione*
La lunghezza della circonferenza è grossomodo 3.14 volte il diametro.



Approssimazione a π 1

Problema



- Il perimetro del poligono è minore della lunghezza della circonferenza.
Aumenta il numero di vertici.
Osserva come il perimetro del poligono (rosso) si avvicina sempre più alla circonferenza (blu).
- La lunghezza della circonferenza P_k e il perimetro P del poligono vengono divisi per d .
Osserva come questi due numeri si avvicinano sempre più.
- Quanti vertici sono necessari, affinché π si avvicini
 - a 1 decimale,
 - a 2 decimali,
 - a 3 decimali?
- La grandezza del diametro ha un influsso sulla rapidità d'avvicinamento tra P e P_k ?

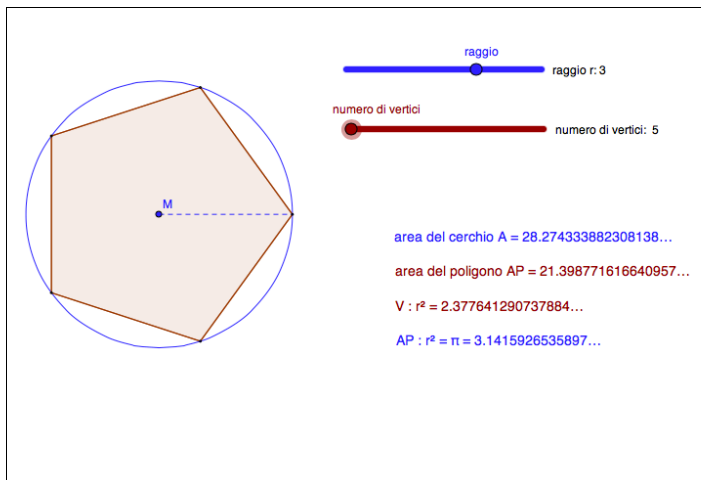
Risposte

-
-
- 12 vertici
 - 57 vertici
 - 94 vertici
- La grandezza del diametro **non ha influsso**.



Approssimazione a π 2

Problema



- L'area del poligono è minore dell'area del cerchio. Aumenta il numero di vertici. Osserva come l'area del poligono di colore marrone si avvicina sempre più all'area del cerchio
- L'area del cerchio A e l'area del poligono A_P vengono divisi per r^2 . Osserva come i valori di A e A_P si avvicinano sempre più.
- Quanti vertici sono necessari affinché l'area si avvicini a 1 decimale,
 - a 1 decimale,
 - a 2 decimali?
- A occhio non si riesce a distinguere un poligono regolare formato da 150 vertici inscritto in un cerchio dalla circonferenza.

Se facendo dei calcoli si utilizza π con 3 decimali (3.141) si presenta la stessa situazione come se si calcolasse con un poligono invece che con un cerchio. Al minimo, quanti vertici dovrebbe avere questo poligono?

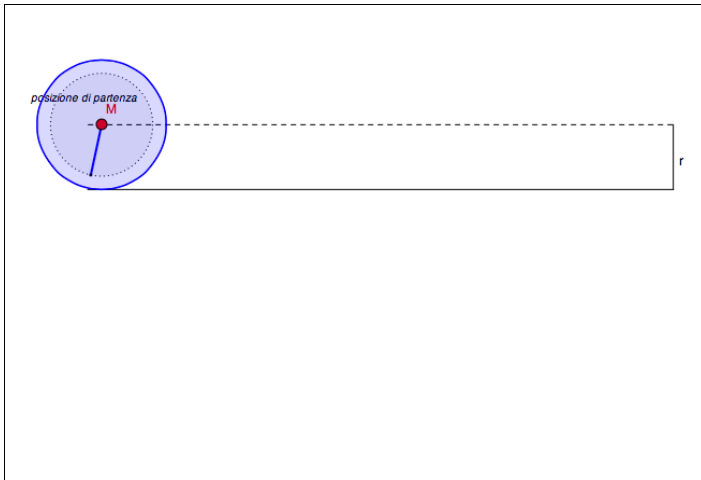
Risposte

-
-
- a) **23 vertici**
 - b) **114 vertici**
- Questo poligono dovrebbe avere **almeno 150 vertici** (numero massimo di vertici possibile da inserire in questo esercizio).



Cicloide

Problema



1. Se un cerchio rotola lungo una retta un punto fissato al cerchio descrive un cicloide (traiettoria della ruota, curva rotatoria).

Descrivi la forma/l'andamento del cicloide se

- il punto è posizionato *entro il cerchio*, come il coperchio della valvola di una ruota di bicicletta;
- il punto è posizionato *sulla circonferenza*, come un segno sulla superficie di aderenza di un pneumatico;
- il punto è posizionato *all'esterno della superficie del cerchio*, come il bordino di una ruota ferroviaria.

2. Per gli esercizi *a* e *b* cita ulteriori esempi tolti dalla vita quotidiana.

Risposte

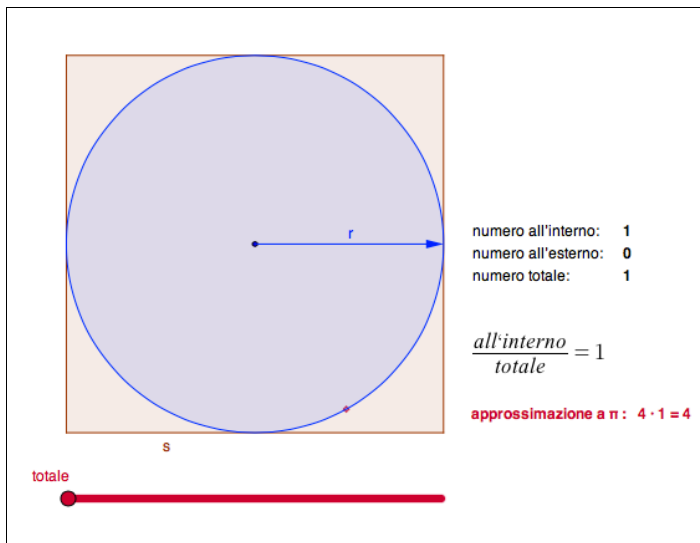
- Possibile descrizione*
Il punto descrive una «traiettoria ondulata» che corre sempre sopra la retta.
 - Possibile descrizione*
Il punto descrive degli archi consecutivi, che iniziano e finiscono sulla retta.
 - Possibile descrizione*
Il punto descrive degli archi che parzialmente corrono sotto la retta e s'intersecano.
- Possibili esempi*

 - Nell'esercizio a): punto di fissaggio dell'asta della forza motrice nelle locomotive a vapore.
 - Nell'esercizio b): testa di un chiodo infisso in un pneumatico.



Casualità e π

Problema



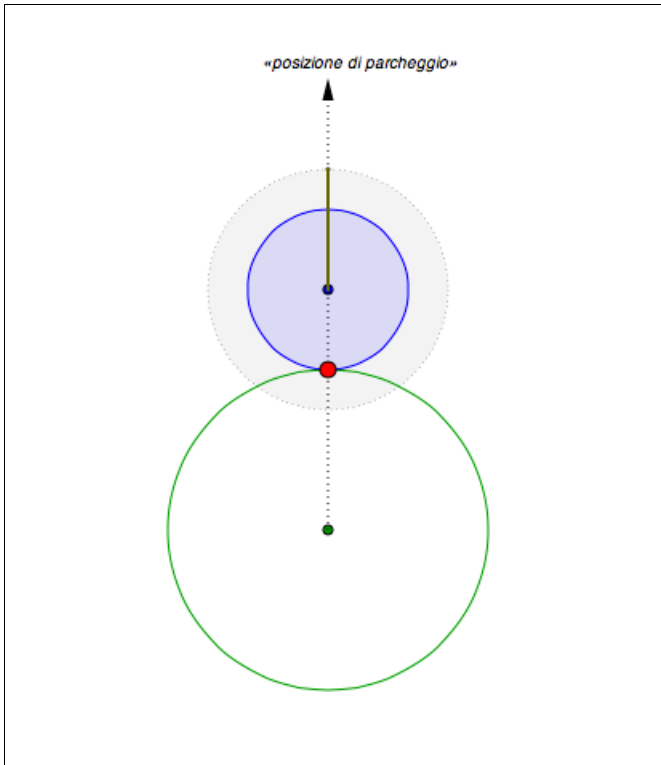
1. Calcola ogni volta l'area della superficie quadrata e l'area del cerchio se $s = 1$.
2. Se i punti cadono casualmente sulla superficie quadrata, una parte cade nel cerchio.
 Grossomodo il rapporto tra il «numero all'interno» e il «numero totale» corrisponderà al rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato.
 Per ottenere π con quale numero deve essere moltiplicata l'area del cerchio?
3. Fai 'piovere' sempre un numero maggiore di punti sulla superficie quadrata e osserva i numeri indicati.
 Annota le tue osservazioni.

Risposte

1. – Area della superficie quadrata: 1
 – Area del cerchio: 0.785...
2. Vale: $A_K = r^2 \pi = \frac{s^2}{2^2} \cdot \pi$
 Se $s = 1$, vale: $A_K = \frac{1}{2^2} \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot \pi$
 L'area del cerchio deve essere moltiplicata per 4.
3. *Possibili constatazioni*
 Il numero si avvicina sempre più a π . 1000 punti fanno 'piovere' solamente il valore 3.08.

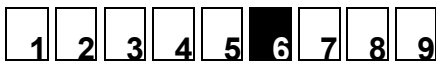
Epicycloide

Problema



1.

1. Rotola il cerchio e sperimenta posizioni diverse.
2. Come deve essere posizionato il «braccio» cosicché la traiettoria di colore rosso (l'epicycloide)
 - a) non tocchi il cerchio di colore verde,
 - b) tocchi il cerchio di colore verde,
 - c) entri nell'area del cerchio di colore verde?
3. Come devono essere scelti i due raggi cosicché la traiettoria di colore rosso (l'epicycloide) risulti una figura chiusa.
4. Quale posizione produce
 - a) una curva cardiaca ([cardioide](#)),
 - b) una curva renale ([nefroide](#)),
 - c) un cerchio?
5. Premessa: la traiettoria di colore rosso deve essere chiusa.
 - Come si può prevedere quante insenature crea la traiettoria, quante volte tocca il cerchio di colore verde oppure quante virate fa? Perché?
 - Motiva.



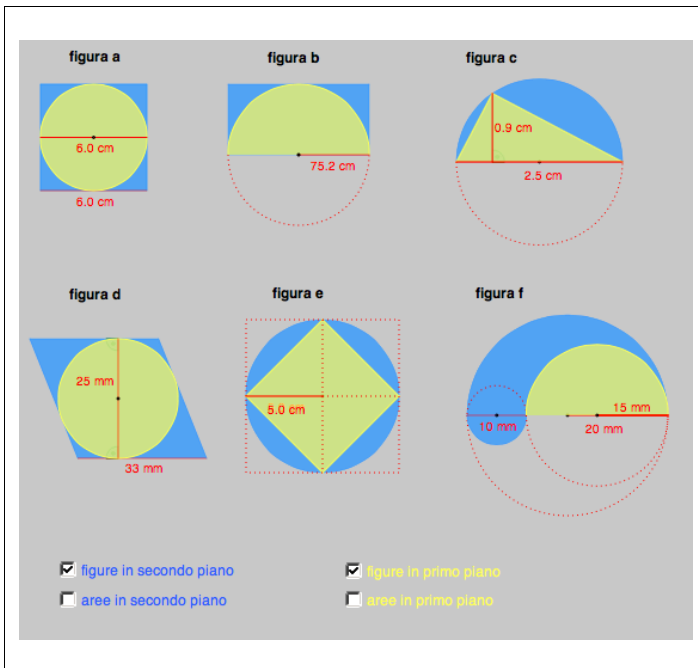
Risposte

1. –
2. a) Il «braccio» deve essere **più corto** del raggio di colore blu.
b) Il «braccio» deve avere la **stessa lunghezza** del raggio di colore blu.
c) Il «braccio» deve essere **più lungo** del raggio di colore blu.
3. *Possibile formulazione*
Il raggio di colore verde deve essere un multiplo del raggio di colore blu.
4. a) *Possibile formulazione*
I due raggi e il «braccio» devono avere la stessa lunghezza.
b) *Possibile formulazione*
La lunghezza del raggio di colore blu e del «braccio» deve essere la metà di quella del raggio di colore verde.
c) *Possibile formulazione*
Il «braccio» deve avere la lunghezza zero.
5. *Possibile formulazione*
Il numero delle insenature, dei punti di contatto oppure delle virate dipende dal rapporto con numeri interi della lunghezza dei due raggi. Il rapporto corrisponde al numero di insenature, di punti di contatto oppure di virate.
Possibile motivazione
Se ci sono insenature, punti di contatto oppure virate dipende dalla lunghezza del «braccio». La lunghezza della circonferenza è proporzionale al raggio. La lunghezza della circonferenza del cerchio di colore blu rotola lungo il cerchio di colore verde.
Esempi:
 $r_{\text{verde}} : r_{\text{blu}} = 1$; 1 insenatura oppure virata oppure punto di contatto (p.es. cardioide)
 $r_{\text{verde}} : r_{\text{blu}} = 2$; 2 insenature oppure virate oppure punti di contatto (p.es. nefroide)
 $r_{\text{verde}} : r_{\text{blu}} = 3$; 3 insenature oppure virate oppure punti di contatto



Figure su figure

Problema



- Le figure geometriche di colore giallo sono posizionate sopra le figure geometriche di colore blu. In tre passi calcola per ogni figura l'area della superficie di colore blu ancora visibile.
 - Disattiva le figure di colore giallo e calcola l'area delle figure di colore blu.
 - Disattiva le figure di colore blu e attiva di nuovo quelle di colore giallo. Calcola l'area delle figure di colore giallo.
 - Qual è il terzo passo da compiere?

Risposte

- a) Area delle figure di colore blu:

figura a: $6.0 \cdot 6.0 = 36 \text{ cm}^2$
 figura b: $150.4 \cdot 75.2 = 11310.08 \text{ cm}^2$
 figura c: $\pi \cdot 2.5^2 : 4 : 2 = 2.454... \text{ cm}^2$
 figura d: $33 \cdot 25 = 825 \text{ mm}^2$
 figura e: $\pi \cdot 5.0^2 = 78.539... \text{ cm}^2$
 figura f: $\pi \cdot 20^2 : 2 + \pi \cdot 5^2 : 2 = 667.588... \text{ mm}^2$

- Area delle figure di colore giallo:

figura a: $\pi \cdot 6.0^2 : 4 = 28.274... \text{ cm}^2$
 figura b: $\pi \cdot 75.2^2 : 2 = 8882.916... \text{ cm}^2$
 figura c: $2.5 \cdot 0.9 : 2 = 1.125 \text{ cm}$
 figura d: $\pi \cdot 25^2 : 4 = 490.873... \text{ mm}^2$
 figura e: $5.0 \cdot 5.0 \cdot 2 = 50 \text{ cm}^2$
 figura f: $\pi \cdot 15^2 : 2 = 353.429... \text{ mm}^2$

- Terzo passo

L'area di colore giallo deve essere sottratta all'area di colore blu:
 figura a: $7.725... \text{ cm}^2$

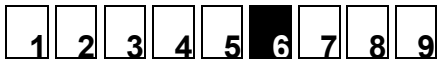


figura b: 2427.163... cm²

figura c: 1.329... cm²

figura d: 334.126... mm²

figura e: 28.539... cm²

figura f: 314.159... mm²